

基于快速稀疏正则化的旋转梁损伤识别*

杨达豪, 吕中荣, 汪利

中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006

摘要: 将旋转叶片简化为旋转梁, 文章提出了一种基于快速稀疏正则化的旋转梁损伤识别方法。该方法将结构损伤识别简化成非线性最小二乘问题, 即寻找损伤参数, 使得模态残差最小。损伤识别是典型的反问题, 通常具有非适定性, 即识别结果对测量误差十分敏感。为克服非适定性并快速求解损伤识别反问题, 提出了一种快速稀疏正则化方法。该方法将稀疏正则化简化成一个摩擦模型, 模型中的静摩擦力即为正则化参数。数值算例表明, 该方法不仅能准确识别出旋转梁的损伤程度和位置, 还可以快速地确定正则化参数, 从而有效地减少迭代次数, 提高计算效率。

关键词: 旋转梁; 损伤识别; 灵敏度分析; 稀疏正则化; 正则化参数

中图分类号: TB12 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 06-0142-08

Damage detection of rotating beam with fast sparse regularization

YANG Dahao, LÜ Zhongrong, WANG Li

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China

Abstract: In this paper, the rotor blade is simplified to rotating beam for which the proposed fast sparse regularization approach is applied to realize the damage detection. The damage detection can be formulated as a nonlinear least squares problem that finds the damage parameters to minimize the residuals between the calculated modal data and the measured modal data. Damage detection is a typical inverse problem which is usually ill-posed, i. e., the identification is sensitive to the noise. To overcome such ill-posedness and quickly deal with the inverse problem, the fast sparse regularization approach is proposed, which transforms the sparse regularization into a frictional-model, whose regularization parameter is the static friction force. Numerical example demonstrates the accuracy and efficiency of the proposed approach for it enable to select the suitable regularization parameter quickly.

Key words: rotating beam; damage detection; sensitivity analysis; sparse regularization; regularization parameter

在工程中, 风机叶片^[1]、直升机叶片^[2]等是相关结构的重要部件, 并且可以简化成旋转梁模型。在长期的工作环境下, 这些重要部件容易产生裂纹、发生损伤、甚至断裂, 严重地影响使用安全和经济效益。为此, 有必要对旋转梁实行结构健康监测, 维护整体结构正常运作。已有的研究表明, 旋转梁会发生大幅运动和微弹性变形^[3]; 在科氏力和离心力的作用下, 容易产生刚度效应^[4-5]。为此, 引入非笛卡尔坐标系变量延伸变形 s (stretch deformation) 与笛卡尔坐标系变量翼弦变形 v (chordwise deformation)、挥舞变形 w (flapwise deformation), 以建立可以反映旋转梁更为真实运动的线性偏微分方程, 并且使用有限

* 收稿日期: 2020-06-08

录用日期: 2020-07-08

网络首发日期: 2020-11-11

基金项目: 国家自然科学基金 (11702336, 11972380)

作者简介: 杨达豪 (1995年生), 男; 研究方向: 参数识别; E-mail: yangdh5@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 汪利 (1988年生), 男; 研究方向: 计算力学; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

单元法进一步得到离散方程^[6]。

结构损伤识别是典型的反问题, 在噪声影响或者数据不足的情况下, 该反问题往往是一个病态的待求解目标方程。为了克服该弊端, 需要引入正则化约束, 如Tikhonov正则化^[7-8], 稀疏正则化^[9-11]。Tikhonov正则化是L2范数并具有连续可导性质。目标方程在引入Tikhonov正则化之后, 可以通过SVD分解, 获得解析解, 但正则化参数仍然由L-curve曲线确定^[7]。实际上, 结构损伤数目是具有稀疏性的, 即损伤数目应该是少量的, 这与稀疏正则化所呈现的性质一致。为此, 本文使用稀疏正则化求解目标函数, 以呈现更好的鲁棒性。稀疏正则化项即L1正则化项, 由于不具有连续可导性质, 使得目标方程求解显得较为困难。目前已有较为成熟的算法^[10], 如LASSO法 (least absolute selection and shrinkage operator)、内点法 (interior point method)、主动集法 (active set method)。但这些方法都需要确定一个合适的稀疏正则化参数。已有的稀疏正则化参数确定方法有^[11]: L-curve曲线法, 差异原则法 (method of discrepancy principle) 以及广义交叉验证法 (GCV, generalized cross-validation method) 等。这些方法应用较为广泛, 但容易受到噪声的影响且不可避免地有着计算代价高的缺点。为克服此类缺点, 本文提出一种受摩擦模型启发的快速稀疏正则化方法。该方法指出, 引入稀疏正则化相当于引入摩擦效应, 其中稀疏正则化参数对应于静摩擦力。基于摩擦模型的物理意义, 可直接选定某个摩擦力为正则化参数, 从而快速求解目标函数, 识别损伤程度和位置。数值算例表明, 该方法具有效率高、鲁棒性强的优势。

1 旋转梁动力模型

如图1所示, 旋转梁的长度为 L , 质量密度为 ρ , 杨氏模量为 E , 截面面积为 A , 关于 y 轴和 z 轴的极惯性矩为 I_y, I_z , 且有 $I_y = I_z$ 。给定旋转速度 Ω , 旋转梁上一点从 P 运动到 P' , 其位移向量设为 $d\mathbf{r}$ 。在笛卡尔坐标系下, 该点的运动速度 (证明见附录) 为^[12]:

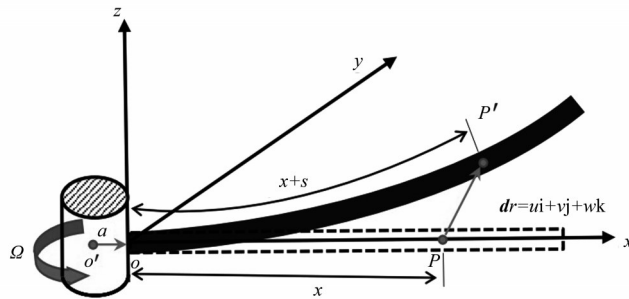


图1 旋转梁模型

Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

$$\dot{r}_p = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Omega w \right) \mathbf{i} + \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega (a + x + u) \right] \mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial t} \mathbf{k}, \quad (1)$$

其中 a 是转台的半径, u, v, w 是轴向变形、翼弦变形、挥舞变形。引入非笛卡尔坐标系变量延伸变形 s ^[3], 则

$$\dot{u} = \dot{s} - \int_0^x \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \xi} d\xi - \int_0^x \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi} d\xi. \quad (2)$$

至此, 可以得到在混合变量 s, v, w 下的动能和应变能, 利用哈密顿原理, 旋转梁的自由振动方程为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left[\frac{\rho A (\dot{r}_p)^2}{2} - \frac{E}{2} \left[A \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right] dx dt = 0, \quad (3)$$

其中 δ 是一个微分算子。根据有限单元法, 方程(3)的矩阵弱形式为^[6]

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{d}}_w + (\mathbf{K}_w + \Omega^2 \mathbf{S}_w) \mathbf{d}_w = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_{sv} \ddot{\mathbf{d}}_{sv} + 2\Omega \mathbf{G}_{sv} \dot{\mathbf{d}}_{sv} + [\mathbf{K}_{sv} + \Omega^2 (\mathbf{S}_{sv} - \mathbf{M}_{sv}) + \dot{\Omega} \mathbf{G}_{sv}] \mathbf{d}_{sv} = 0, \quad (5)$$

其中 \mathbf{d}_w 、 \mathbf{d}_{sv} 分别是挥舞运动变形向量, 翼弦变形向量; \mathbf{S}_w 、 \mathbf{S}_{sv} 是由旋转运动所产生的刚度矩阵, \mathbf{G}_{sv} 是陀

螺矩阵 (gyroscopic matrix); M_{sv} 、 M_w 是质量矩阵; K_w 、 K_{sv} 是刚度矩阵。显然, 方程 (4)、(5) 分别表征旋转梁的挥舞运动方程、翼弦运动方程。考虑匀速旋转的情况, 即 $\dot{\Omega} = 0$, 通过求解方程 (4)、(5) 的特征值问题^[13], 可以获得旋转梁的模式数据, 包括固有频率 λ (特征值) 和模式 φ (特征向量)。

2 目标函数

结构损伤通常表现为系统刚度的局部减小, 即相关单元刚度发生折减。设损伤系数为 p^i , $p^i \in (-1, 0]$, 其中 i 表示的是第 i 个单元。 $p^i = -1$ 时表示第 i 个单元断裂, 即完全损伤; $p^i = 0$ 时表示第 i 个单元完好。一般, 损伤位置是稀疏的, 即系统的损伤参数 $p = [p^1, p^2, p^3, \dots, p^n]$ 具有少量非零元素, 即具有稀疏性。

系统刚度可以写成关于损伤参数的函数, 即

$$K_w(p) = K_w^0 + \sum_{i=1}^n p^i k_w^i; K_{sv}(p) = K_{sv}^0 + \sum_{i=1}^n p^i k_{sv}^i, \quad (6)$$

其中 K_w^0 、 K_{sv}^0 是系统的无损刚度; k_w^i 、 k_{sv}^i 是第 i 个单元的刚度。根据方程 (4)、(5) 的特征值问题, 模式数据 R 是关于 p 的函数, 即

$$R(p) = \left[\left\{ \lambda_i \right\}_{i=1}^l; \left\{ \varphi_i \right\}_{i=1}^l \right], \quad (7)$$

其中 l 是测量的阶数。记测量获取的损伤旋转梁的模式数据为

$$\bar{R} = \left[\left\{ \bar{\lambda}_i \right\}_{i=1}^l; \left\{ \bar{\varphi}_i \right\}_{i=1}^l \right], \quad (8)$$

基于一般反问题理论, 参数识别可以阐述为如下非线性最小二乘的优化问题: 寻找参数 $p = [p^1, p^2, p^3, \dots, p^n]$, 使得

$$G(p) = \|\bar{R} - R(p)\|_W^2 = (\bar{R} - R(p))^T W (\bar{R} - R(p)) \quad (9)$$

取最小值, 其中 W 是一个权重矩阵。

方程 (9) 是一个非线性目标函数, 可以通过迭代法进行求解, 即:

① 给定初始值 $p_0 = [0, 0, 0, \dots, 0]$ 。

② 基于第 $(k-1)$ 步迭代结果, 求解第 k 步的迭代值, 即 $p_k = p_{k-1} + \Delta p$, 其中 Δp 是在第 k 步求解得到的增量, $k = [1, 2, 3, \dots, n]$ 。

③ 当满足收敛条件的时候, 结束迭代求解。

为了求得增量 Δp 或参数 p_k , 在第 $k-1$ 步时, 对 $R(p_k)$ 在 p_{k-1} 处进行泰勒级数展开, 即线性化处理

$$R(p_k) = R(p_{k-1} + \Delta p) \approx R(p_{k-1}) + S(p_{k-1})\Delta p, \quad (10)$$

其中 $S(p_{k-1})$ 是灵敏度矩阵, 可通过对特征方程 (4)、(5) 进行灵敏度分析求得^[13]。令

$$\Delta R(p_{k-1}) = \bar{R} - R(p_{k-1}), \quad (11)$$

则方程 (9) 可以改写成

$$G(p, p_{k-1}) = \|\Delta R(p_{k-1}) - S(p_{k-1})(p - p_{k-1})\|_W^2. \quad (12)$$

由于方程 (12) 仍可能是病态的, 可添加 L1 正则化项, 以额外引入稀疏性约束, 此时目标方程变为

$$G_\gamma(p, p_{k-1}) = \|\Delta R(p_{k-1}) - S(p_{k-1})(p - p_{k-1})\|_W^2 + \gamma \|p\|, \quad (13)$$

其中 γ 是正则化参数。通过求解方程 (13) 的最小值, 即可求解得到增量 Δp 或参数 p_k 。

3 快速稀疏正则化

为求解最终目标方程 (13), 首先要确定稀疏正则化参数 γ 。为此, 可从一个由质量块、库伦摩擦单元、弹簧单元组成的多自由度摩擦模型出发, 如图 2 所示。基于该模型, 可推导出正则化参数 γ 的表达式, 即快速稀疏正则化。

设整个物理摩擦模型系统所作的功为 $f_\gamma(\alpha)$, 即

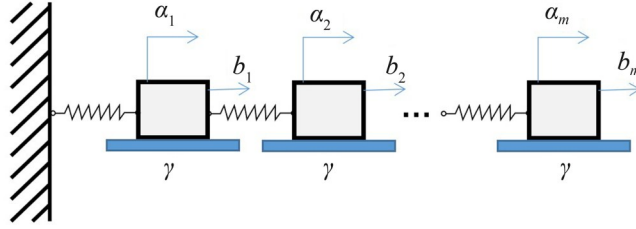


图2 快速稀疏正则化的物理摩擦模型

Fig. 2 Illustration of fast sparse regularization as a friction model

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{b}^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (14)$$

$$f_\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = f(\boldsymbol{\alpha}) + \gamma \|\boldsymbol{\alpha}\|_1, \quad (15)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{b} 、 γ 分别是质量块的位移向量、系统的刚度矩阵、外荷载向量、库伦摩擦单元的静摩擦力。方程 (14) 第一项表示弹簧存储的能量, 第二项为外力做的功。方程 (15) 的第二项为摩擦消耗的能量, 也就是说稀疏正则项的物理意义为能量耗散或外力做功^[14]。

基于该摩擦模型, 设 $\boldsymbol{\alpha}^* = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots, \alpha_n^*]$ 是方程 (15) 的位移解, 即

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} f_\lambda(\boldsymbol{\alpha}). \quad (16)$$

此时, 摩擦模型中的摩擦力向量 $\mathbf{F}^* = [F_1^*, F_2^*, F_3^*, \dots, F_n^*]$ 为^[11]

$$\mathbf{F}^* = -\left. \frac{\partial f(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^*} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}^*. \quad (17)$$

根据摩擦模型物理规律, 摩擦力与位移满足如下性质:

(1) 如果作用在第 i 个质量块下的库伦摩擦力小于静摩擦力, 即 $|F_i^*| < \gamma$, 那么第 i 个质量块保持静止, 即 $\alpha_i^* = 0$ 。

(2) 如果第 j 的质量块发生位移, 即 $\alpha_j^* \neq 0$, 那么一定有作用在第 j 个质量块下的库伦摩擦力等于静摩擦力, 即 $|F_j^*| = \gamma$ 。

这说明静摩擦力或者稀疏正则化参数 γ 控制着位移解 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 的稀疏性, 即非零元素的数量。对 \mathbf{F}^* 元素按照各个元素的绝对值从大到小重新排序, 即 $\bar{\mathbf{F}}^* = [\bar{F}_1^*, \bar{F}_2^*, \bar{F}_3^*, \dots, \bar{F}_n^*] (|\bar{F}_1^*| \geq |\bar{F}_2^*| \geq |\bar{F}_3^*| \geq \dots \geq |\bar{F}_n^*|)$ 。若 $\gamma < \bar{F}_j^*$, 则至少有 $j (j < n)$ 个非零位移。

基于以上摩擦模型的结论, 结构损伤识别的目标方程 (12)、(13) 也具有相似的性质, 即可以根据摩擦力快速选择正则化参数。设第 k 步迭代过程中, 需要求解目标方程 (13) 的解 p_k , 即

$$p_k = \arg \min_p G_\gamma(p, p_{k-1}). \quad (18)$$

根据摩擦力方程 (16), 此时结构损伤问题的“摩擦力向量”为

$$\mathbf{F}_k \approx -\left. \frac{\partial G(p, p_{k-1})}{\partial p} \right|_{p=p_{k-1}} = 2\mathbf{S}^T(p_{k-1})\mathbf{W}\Delta\mathbf{R}(p_{k-1}). \quad (19)$$

根据 \mathbf{F}_k 各个元素的绝对值, 从大到小排列 \mathbf{F}_k , 得到新的向量 $\bar{\mathbf{F}}_k$ 。设正则化参数 γ 为“摩擦力向量” $\bar{\mathbf{F}}_k$ 中的第 La 大的值, 即

$$\gamma = \bar{F}_k^{La}, \quad (20)$$

其中 La 为

$$La = \text{integer}(L_{\min} + (L_{\max} - L_{\min})e^{-\zeta(k-1)}), \quad (21)$$

其中 integer 表示取实数的整部。 L_{\min} 是最终识别结果中的损伤数量 (即非零元素的数量), 且有 $L_{\min} \geq d + 1$, d 是假定的损伤数量。 L_{\max} 是最大的损伤数量, 且有 $L_{\max} \leq n$ 。 ζ 是一个衰减系数, 且有 $\zeta =$

$$\frac{1}{N-1} \ln\left(\frac{L_{\max} - L_{\min}}{0.99}\right), \text{ 即在第 } N \text{ 次迭代之后, 有 } La = L_{\min}.$$

通过以上“摩擦力”的选择方程, 即方程 (20), 可以有效控制解的稀疏性。方程 (21) 中的 La 在初

始迭代时具有较大值, 即正则化参数 γ 具有较小值, 即“更多的滑块可以滑动”, 这可以避免损伤程度和位置信息的丢失。在迭代一定次数之后, La 具有最小值, 此时 γ 取得最大值, 即“只有个别的滑块可以滑动”, 从而保证了最终结果的稀疏性。

4 数值算例

考虑一旋转梁, 其长度 $L = 0.5 \text{ m}$, 质量密度 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, 杨氏模量 $E = 71 \text{ GPa}$, 截面面积 $A = 10^{-4} \text{ m}^2$, 关于 y 轴和 z 轴的极惯性矩 $I_y = I_z = 8.33 \times 10^{-12} \text{ m}^4$ 。转台半径 $a = 0.1 \text{ m}$ 。将旋转梁离散成 11 个单元, 设第 3 个单元发生损伤, 损伤稀疏为 $p^i = -0.3$ 。考虑转速 $\Omega = 30 \text{ rad/s}$ 。考虑特征值噪声为 0.25%, 特征向量噪声为 5%。对于方程 (21) 中 La 的选择, 令 $d = 1$, $L_{\min} = 1$, $L_{\max} = 11$ 。在无噪声情况下, $N = 10$; 有噪声情况下, $N = 100$ 。基于快速稀疏正则化识别方法, 只取前四阶模态数据即可取得较好的识别结果, 基于挥舞模态数据和翼弦模态数据的损伤识别结果分别如图 3-4 所示。为了进一步突出本文所提方法的有效性、快速性, 选取 L2 正则化方法^[7] 进行识别结果对比。为了取得较好的识别结果, 需要使用前六阶的模态数据。基于挥舞模态数据和翼弦模态数据的损伤识别结果分别如图 5-6 所示。

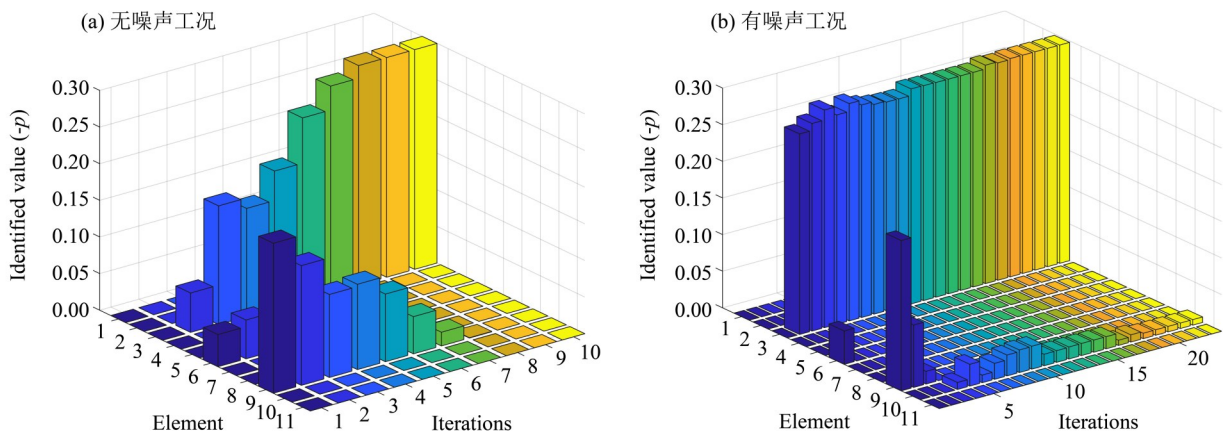


图 3 基于挥舞模态数据的识别结果

Fig. 3 The identification results based on the flapwise modal data

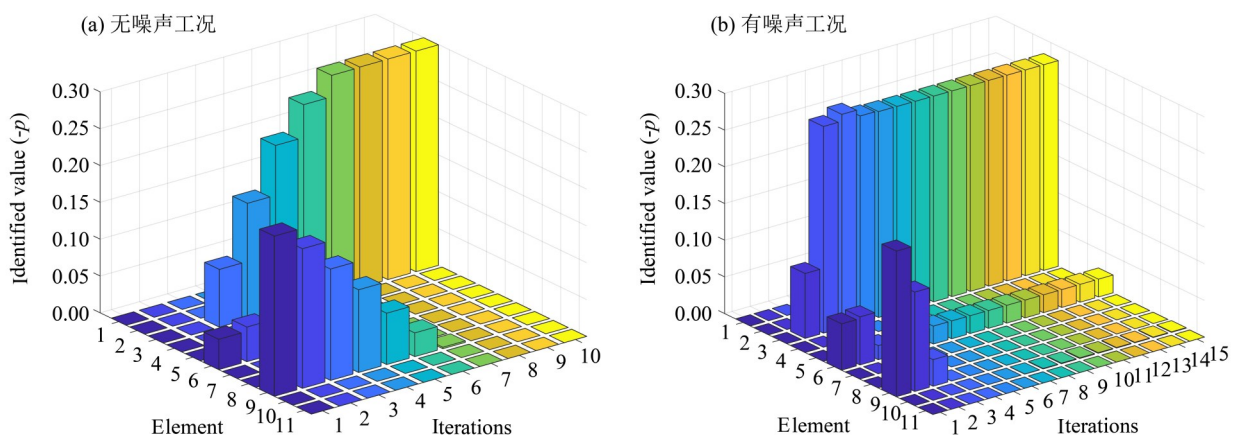


图 4 基于翼弦模态数据的识别结果

Fig. 4 The identification results based on the chordwise modal data

图 3-4 表明, 在没有噪声的情况下, 基于两种模态数据, 快速稀疏正则化方法在第 7 次迭代之后, 识别结果已经接近于准确值。在有噪声的情况下, 基于挥舞模态数据的识别结果要优于基于翼弦模态数据的识别结果, 这是因为翼弦运动方程含有延伸变形, 同时含有广义阻尼项 $2\Omega G_w$, 使得翼弦运动方程更加复杂, 容易受到转速的影响, 求解相应的模态灵敏度也更加困难。在受到噪声的影响情况下, 基于快

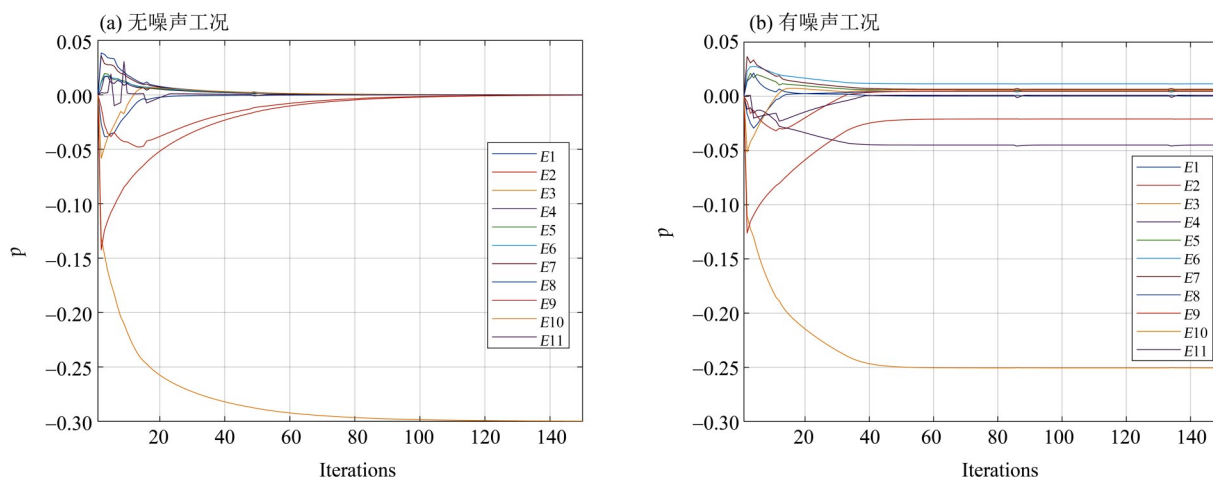


图5 基于挥舞模态数据的识别结果(使用L2正则化)

Fig. 5 The identification results based on the flapwise modal data (with L2 method)

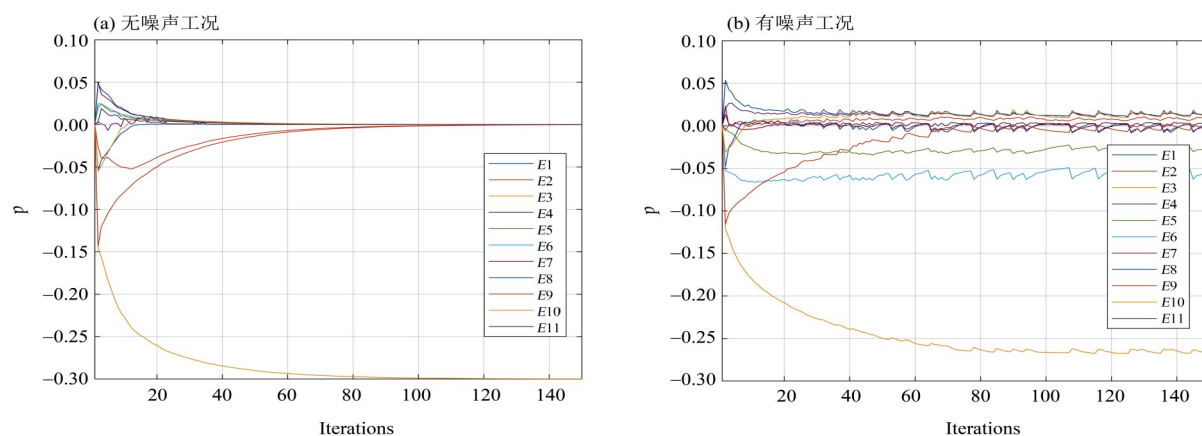


图6 基于翼弦模态数据的识别结果(使用L2正则化)

Fig. 6 The identification results based on the chordwise modal data (with L2 method)

速稀疏正则化的迭代收敛次数也仅20次。相比L-curve曲线方法等选择不同的正则化参数,快速稀疏正则化方法可以基于摩擦模型,直接选取“摩擦力”为正则化参数,在效率上具有显著优势^[11]。此外,如图5-6所示,L2正则化在无噪声情况下,可以取得较为准确的识别结果,但是所需要的模态数据和迭代求解次数显著增加,这对数据采集的传感器、计算机性能提出了更高的要求。在噪声影响下,L2正则化方法错误地识别若干单元具有损伤,并且 p^3 的识别精度显著下降。由于翼弦模态响应更加复杂,L2正则化识别方法在识别过程中也更加容易受到噪声数据的影响,如图6所示。

为了确定快速稀疏正则化方法的识别精度,各工况的识别结果列于表1。基于快速稀疏正则化的识别结果,最大的相对误差发生在基于翼弦模态数据(噪声)的第3个单元,仅为6.57%,表明所提方法具有较高的损伤识别精度和鲁棒性。基于L2正则化的识别结果,该方法容易错误地识别单元损伤,最大误差发生在基于翼弦模态数据(噪声)(L2)的第六个单元,错误识别值为-0.0536;最大相对误差发生在基于挥舞模态数据(噪声)(L2)的第3个单元,为16.4%。综上,基于快速稀疏正则化方法不仅可以利用损伤位置和程度的稀疏性特性,提升识别结果的精度;还能准确地选择合适的正则化参数,提升收敛速度。

5 小结

本文提出一种快速稀疏正则化方法识别旋转梁的损伤。该方法从摩擦模型出发,指出正则化参数可以通过“摩擦力”大小直接确定,并能控制解的稀疏性。数值算例表明,通过对比L2正则化方法和L-

表 1 基于快速稀疏正则化的旋转梁损伤识别结果

Table 1 Identification result of rotating beam with the fast sparse regularization approach

| 工况\变量 | p^1 | p^2 | p^3 | p^4 | p^5 | p^6 | p^7 | p^8 | p^9 | p^{10} | p^{11} |
|----------------------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|----------|----------|----------|
| 真实值 | 0 | 0 | -0.300 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 识别值-挥舞模态数据 | 0 | 0 | -0.299 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 识别值-挥舞模态数据 (噪声) | 0 | 0 | -0.297 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -0.007 5 | 0 |
| 识别值-翼弦模态数据 | 0 | 0 | -0.299 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 识别值-翼弦模态数据 (噪声) | 0 | 0 | -0.280 3 | 0 | 0 | -0.024 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 识别值-挥舞模态数据 (L2) | 0 | 0 | -0.299 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 识别值-挥舞模态数据 (噪声) (L2) | 0.004 6 | 0.004 8 | -0.250 6 | -0.044 9 | 0.005 9 | 0.011 5 | 0.006 5 | 0.000 2 | -0.020 9 | 0.006 0 | 0.001 0 |
| 识别值-翼弦模态数据 (L2) | 0 | 0 | -0.299 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 识别值-翼弦模态数据 (噪声) (L2) | 0.001 3 | 0.007 1 | -0.266 8 | 0.012 7 | -0.026 6 | -0.053 6 | 0.000 3 | 0.012 4 | -0.004 2 | 0.011 5 | 0.003 3 |

curve 方法, 所提方法不仅计算效率高且可以准确快速地识别出旋转梁的损伤程度和位置。同时, 所提的快速稀疏正则化方法表明, 基于挥舞模态数据的识别结果要优于基于翼弦模态数据的识别结果, 这是因为翼弦运动方程更为复杂, 容易受到旋转速度的影响, 且模态的灵敏度分析更为困难。

附 录

公式 (1) 是建立在旋转坐标系下。设惯性坐标系为 oij , 由于轴保持不变, 平面发生旋转可表示成图 7。图 1 中, P 点运动到 P' , P' 的坐标 r_p 为

$$r_p = (a + x + u)i + vj + wk. \tag{22}$$

对 r_p 关于时间进行求导, 那么有

$$r_p = \frac{\partial(a + x + u)}{\partial t}i + (a + x + u) \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}j + v \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}k = \frac{\partial u}{\partial t}i + \frac{\partial v}{\partial t}j + \frac{\partial w}{\partial t}k + (a + x + u) \frac{\partial i}{\partial t} + v \frac{\partial j}{\partial t}. \tag{23}$$

为了求得 $\frac{\partial i}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial j}{\partial t}$, 从图 7 可知, 参考坐标系 oij 和惯性坐标系 $o'i'j'$ 具有性质

$$\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i' \\ j' \end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中 α 是转过的夹角, 既有 $\dot{\alpha} = \Omega$, 对公式 (24) 关于时间 t 求导, 可得

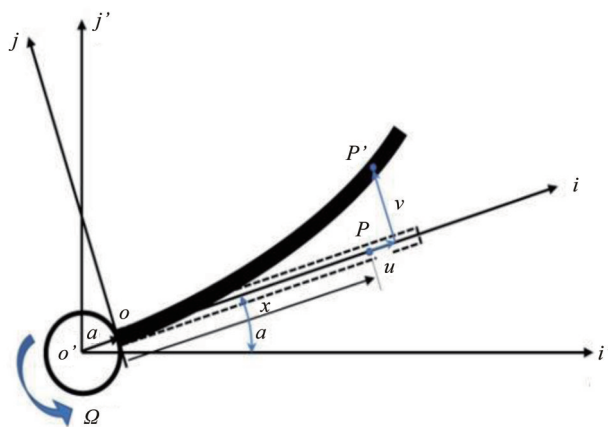


图 7 旋转梁平面示意图

Fig. 7 Configuration of a rotating flexible cantilever beam in-plane deformation

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i' \\ j' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega \\ -\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}. \quad (25)$$

将公式 (25) 带入公式 (23), 可得公式 (1)。

参考文献:

- [1] LI L, LI Y H, LIU Q K, et al. A mathematical model for horizontal axis wind turbine blades[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(11/12): 2695–2715.
- [2] ROY N, GANGULI R. Helicopter rotor blade frequency evolution with damage growth and signal processing[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 283(3): 821–851.
- [3] YOO H H, RYAN R R, SCOTT R A. Dynamics of flexible beams undergoing overall motions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 181(2): 261–278.
- [4] VALVERDE J, GARCÍA-VALLEJO D. Stability analysis of a substructured model of the rotating beam[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 55(4): 355–372.
- [5] 蹇开林, 殷学纲. 旋转梁的固有频率计算[J]. 重庆大学学报, 2001, 24(6): 36–39.
- [6] CHUNG J, YOO H H. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 249(1): 147–164.
- [7] TIKHONOV A N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1963, 151: 501–504.
- [8] ZHANG C D, XU Y L. Comparative studies on damage identification with Tikhonov regularization and sparse regularization: damage detection with Tikhonov regularization and sparse regularization[J]. Structural Control and Health Monitoring, 2016, 23(3): 560–579.
- [9] ZHOU X Q, XIA Y, LI W S. Regularization approach to structural damage detection using frequency data[J]. Structural Health Monitoring, 2015, 14(6): 571–582.
- [10] SCHMIDT M. Least squares optimization with L1-norm regularization[R]. CS542B Project Report, 2005, 504: 195–221.
- [11] WANG L, ZHOU J, LU Z R. A fast friction-model-inspired sparse regularization approach for damage identification with modal data[J]. Computers & Structures, 2020, 227: 106–142.
- [12] KIM H, HEE Y H, CHUNG J. Dynamic model for free vibration and response analysis of rotating beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(22): 5917–5928.
- [13] YANG D H, LU Z R, WANG L. Detection of structural damage in rotating beams using modal sensitivity analysis and sparse regularization [J/OL]. International Journal of Structural Stability and Dynamics. <https://doi.org/10.1142/S0219455420500868>.
- [14] ITO K, KUNISCH K. Lagrange multiplier approach to variational problems and applications[M]. SIAM Philadelphia, 2008.

(责任编辑 王海蓉)